Programme de colle n°27

semaine du 20 au 24 mai

Notions vues en cours

Chapitre 31 : Déterminants

- Application / forme bilinéaire, application / forme p-linéaire : définition, exemples
- Forme n-linéaire alternée : définition, s'annule quand on évalue en une famille liée
- Forme n-linéaire antisymétrique : définition, formule $f(u_{\sigma(1)}, \cdots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, \cdots, u_n)$, toute forme n-linéaire alternée est antisymétrique (c'est même une équivalence)
- Pour une forme n-linéaire alternée avec une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de l'espace de départ : expression de $f(u_1, \cdots, u_n)$; f est entièrement déterminée par $f(e_1, \cdots, e_n)$
- Déterminant d'une famille de vecteurs $(u_1, \cdots, u_n)$ dans une base $\mathcal{B}$, notation $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$
- $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n-linéaire alternée, $\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \cdots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$, $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$
- Déterminant de taille 1, 2, 3 (règle de Sarrus), déterminant d'une matrice carrée, $\det A^\top = \det A$, le déterminant est une forme n-linéaire alternée en les colonnes / les lignes de la matrice (donc si elles forment une famille liée, le déterminant est nul, etc.)
- Opérations élémentaires sur le déterminant
- Mineur (noté Δ_{ij}), cofacteur, développement selon une ligne / colonne, déterminant d'une matrice triangulaire
- Déterminant d'un endomorphisme : définition, notation $\det f$, formules pour $\det(\lambda f)$, $\det(f \circ g)$, $\det(f^{-1})$, formules équivalentes pour les matrices
- Le déterminant d'un endomorphisme correspond à celui de sa matrice selon toute base
- Une famille de n vecteurs d'un e.v. de dimension n est une base si et seulement si leur déterminant selon une base quelconque est non nul
- Comatrice, notation $\mathrm{Com}(A)$, formule $A\mathrm{Com}(A)^\top$, expression de A^{-1} en fonction de $\mathrm{Com}(A)$
- (limite hors programme) Formule de Cramer pour un système de Cramer

Chapitre 32 : Intégration

- Subdivision d'un intervalle $[a, b]$, deux conventions existent : $\sigma = \{x_0, \cdots, x_n\}$ ou $\sigma = (x_0, \cdots, x_n)$: on ne mélangera pas deux conventions dans un même énoncé, pas et support d'une subdivision, τ est plus fine que σ si $\sigma \subset \tau$; la subdivision $\sigma \cup \sigma'$ est plus fine que σ et que σ'
- Fonction en escalier sur $[a, b]$, subdivision adaptée à f, toute subdivision plus fine est encore adaptée, intégrale d'une fonction en escalier, notation $\int_{[a,b]} f$, généralisation sans supposer $a < b$ avec la notation $\int_a^b f$
- Ensemble des fonctions en escalier $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$: c'est un sous-e.v. et un sous-anneau de $\mathbb{R}^{[a,b]}$, toute fonction en escalier est bornée
- Fonction réelle continue par morceaux, ensemble $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$: c'est un sous-e.v. et un sous-anneau de $\mathbb{R}^{[a,b]}$, toute fonction continue par morceaux est bornée
- Toute fonction continue par morceaux peut être "approchée" aussi près qu'on veut par une fonction en escalier
- Intégrale d'une fonction continue par morceaux : définition, linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles, inégalité triangulaire
- Fonction complexe continue par morceaux, ensemble $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$, intégrale d'une fonction complexe
- Si l'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle, alors cette fonction est nulle

Les exercices doivent porter très majoritairement sur les déterminants.

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **29 à 31**. *Des exemples de questions figurent ci-après.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Définitions d'une application bilinéaire, d'une forme bilinéaire et expression d'une application bilinéaire selon une base de l'espace de départ (de dimension finie) Chapitre 31, Définition 31.1 et Proposition 31.2
2. Toute forme n-linéaire alternée est antisymétrique Chapitre 31, Proposition 31.8
3. Définition d'une fonction continue par morceaux. Il pourra également être demandé si une fonction donnée (sous forme de tracé ou par son expression) est continue par morceaux Chapitre 32, Définition 32.10

Exemples de questions libres :

Chapitre 29 :

- Étant donné $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$ et $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ des bases de E, F, G, compléter la formule suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\cdots\cdots}^{\cdots\cdots}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\cdots\cdots}^{\cdots\cdots}(v) \times \mathrm{Mat}_{\cdots\cdots}^{\cdots\cdots}(u)$$

- Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ une base de $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Entre les deux matrices de passages ${P_{\mathcal{B}_c}}^{\mathcal{B}}$ et ${P_{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}_c}$, laquelle est la plus facile à calculer ? Donner cette matrice sans justification.
- Donner la définition de matrices équivalentes, en faisant attention à la taille des matrices.
- Donner la définition de matrices semblables.
- Si deux matrices sont équivalentes, que peut-on dire de leurs rangs ? Est-ce une équivalence ?

Chapitre 30 :

- Qu'appelle-t-on une permutation d'un ensemble E ?
- Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ un élément de S_5. Compléter : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & & & \end{pmatrix}$
- Soit $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$ un cycle. Donner la formule qui décompose ce cycle en produit de transpositions.
- Compléter ce théorème : toute permutation .... peut se décomposer en un produit de cycles ....
- Soit $\sigma \in S_n$. À quelle condition est-ce que σ est une permutation impaire ? Que vaut alors sa signature ?

Chapitre 31 :

- Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E. Que signifie l'assertion "f est alternée" ?
- Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E. Que signifie l'assertion "f est antisymétrique" ?
- Développer le déterminant suivant selon la seconde ligne : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$. On écrira bien chaque terme du développement sans simplification supplémentaire, et on ne demande pas de terminer le calcul.
- Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Existe-t-il des formules pour le déterminant de $A + B$, de λA et de AB ? Si oui, les donner.
- Donner la formule qui fait intervenir une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (sans hypothèse particulière sur A) avec sa comatrice $\mathrm{Com}(A)$.